数理解析研究所講究録
第1798巻2012年59-64



# Non-"equilibrium" oscillations in two-dimensional Euler equations

JST-CREST, 京都大学数学教室　森田 英俊 (Hidetoshi Morita)†
JST-CREST, Department of Mathematics, Kyoto University

## 1 背景

二次元流体の統計力学記述は，本研究会の主要なトピックの一つであった．ここでいう統計力学記述とは，Kolmogorov や，二次元については Kraichnan, Batchelor, Leith に代表される，中間波数領域における普遍的スペクトルやカスケードの話ではない．そうではなく，低波数領域，すなわち巨視的な流れのパターンについての，統計力学を用いた理論である．古くは，本研究会のタイトルにもあるように，Onsager による渦点系の統計力学 [1] に遡る．1990 年代に入って，Miller [2] や Robert や Sommeria [3, 4] によって，連続体としての議論が可能になった．この理論が，例えば木星の大赤斑などを記述することが知られている．

この理論をやや具体的に紹介する．系を時間発展させると場が空間的に激しく変化して微細な構造が現れ，そのため無限の解像度での記述は実際的に不可能になる．そこで無限の解像度での記述を諦め，その代りに粗視化したスケールにおいて確率モデルを導入して統計的記述をする．位置 $\boldsymbol{r}$ のまわりの小領域 $\Delta^2\boldsymbol{r}$ を考える．これは巨視的記述スケールからは無限小と見做せ，そのため依然として連続場を考えることができるが，一方で微視的記述スケールからは次に導入する確率が意味を持つ程度に大きい領域である．この小領域において渦度場の粗視化を次のように行う：

$$\bar{\omega}(\boldsymbol{r})\Delta^2\boldsymbol{r} = \int_{\Delta^2\boldsymbol{r}} \omega(\boldsymbol{r})\mathrm{d}^2\boldsymbol{r} \triangleq \Delta^2\boldsymbol{r}\int \mathrm{d}\sigma\sigma\rho(\sigma;\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

ここで $\omega$ は真の（場の理論でいう「裸の」）渦度場，$\bar{\omega}$ は粗視化された渦度場である．また $\rho(\sigma;\boldsymbol{r})$ は，$\Delta^2\boldsymbol{r}$ 内で $\omega$ の値が $\sigma$ から $\sigma+\mathrm{d}\sigma$ の間にある確率密度関数で，各点において規格化されるものである．第一の等号は単なる空間（平面）積分であるのに対し，第二の等号 $\triangleq$ は確率モデルの導入を意味する．この確率密度関数について全空間の Shanon エントロピーを定義すると，それは $\rho$ に関する汎関数になっている．このエントロピー

†E-mail: hmorita@math.kyoto-u.ac.jp

を，全エネルギーや，Casimir と呼ばれる二次元流体に特徴的な保存量を拘束条件として変分すると，

$$\rho(\sigma;\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\zeta(\bar{\psi}(\boldsymbol{r}),\beta)} \exp\left(-\beta\sigma\bar{\psi}(\boldsymbol{r}) - \alpha(\sigma)\right), \qquad \bar{\omega} = -\nabla^2\bar{\psi} \tag{2}$$

という Boltzmann 分布類似の確率密度関数が得られる．ここで，$\beta$ と $\alpha(\sigma)$ はそれぞれエネルギーと Casimir に対応する Lagrange 未定乗数，$\zeta$ は規格化因子．これを (1) に代入して得られる，$\bar{\psi}$ に関する自己無撞着微分積分方程式を解くことで，巨視的な定常流が得られる，という仕組みである．

このように，二次元流体の統計力学記述の枠組みは，通常の平衡統計力学の考え方と全くパラレルである（ただし，等重率の原理に対応するものについての議論はされていないように見える）．なお，本稿では以下，このエントロピー最大状態を平衡状態と呼ぶが，通常の熱力学系での平衡状態つまり全てが静止した系ではなく，飽くまでこの統計力学記述の文脈での平衡状態，すなわち巨視的な定常流を指していることに注意する．

巨視的定常流が統計力学の「平衡」状態として記述できることがわかった．それでは，「非平衡」についてはどうなっているだろうか，と答うのは，自然な流れであろう．

平衡統計力学が通常適用される熱力学系は，平衡状態から少し離れると，平衡状態へと単純に緩和したり，メソスケールでは平衡まわりを揺らいだりする．なお，この二つが本質的に同じものであるというのは，Onsager のまた別の重要な仕事である [5]．平衡から遠く離れると，非平衡定常状態，さらには分岐を起こしてリミットサイクル等の巨視的非定常運動を生む．この分岐やその後の巨視的運動が，比較的低次元の散逸力学系として記述されることはよく知られている．

この非平衡系の一般的知見から類推して，二次元乱流においても，類似の非平衡へのルートがあるのではないか，と期待できる．実際，定常流への緩和は多数の研究がされている（例えば [6] やその中のリファレンスを参照）し，揺らぎについてもいくつかの研究がある [7,8] が，この文脈での議論はあまりされていないように見える．

本研究は，それにもかかわらず，この線形非平衡領域を一気に飛び越え，強い非平衡での現象を考えるものである．つまり，巨視的定常流から遠く離れたところで，低次元の分岐を経て，非定常流が現れることが期待される．本講演では，この非定常流が実際に見られたこと，およびその機構について報告した．本稿ではその概要について述べる．詳細は論文 [9] を御覧いただきたい．

## 2 模型

非圧縮性二次元 Euler 方程式[1]

$$\partial_t \omega + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \omega = 0 \tag{3}$$

を，二重周期的境界条件をもつ領域（2-トーラス）$\mathcal{D} = [-L_x/2, L_x/2) \times [-L_y/2, L_y/2)$ 上で考える．ここで，$\boldsymbol{v} = (v_x, v_y)$ は速度場，$\omega = \partial_x v_y - \partial_y v_x$ は渦度場である．適当な無次元化により，$L_x = 2\pi$，$L_y = 2\pi\Gamma$ ととれる；ここで $\Gamma \geq 1$ はアスペクト比．

この系は二つの定常解を持つ．ひとつは $\Gamma > 1$ のときに存在する

$$\Omega(x, y) = -\cos\frac{y}{\Gamma} \tag{4}$$

というもので，$y$ 方向の流れのみを持つ zonal flow である．もうひとつは，$\Gamma = 1$ のときに存在する

$$\Omega(x, y) = -\cos x - \cos y \tag{5}$$

というもので，正負一対の大きな渦を持つ dipole flow である．それぞれ係数はエネルギーの無次元化により 1 ととることができる．実はこれらの解は，単に定常なだけでなく，前述の統計力学の枠組における平衡状態でもあることが知られている [10].

以下，$\Gamma > 1$ を考える．我々は平衡状態からの連続的な変化に興味があるので，初期条件を「平衡状態＋変位」という形で与える．Base flow となる平衡状態は $\Gamma > 1$ より (4) である．変位は，我々は巨視的なパターンに興味があるので，空間的にゆるやかなものを与える．その最も単純な場合として，$x$ 方向に波数 1 のものを考える．結局，初期値は次のようになる：

$$\omega(t = 0, x, y) = \Omega(x, y) + \delta\omega(t = 0, x, y) = -\cos\frac{y}{\Gamma} - \epsilon\cos x \tag{6}$$

この $\epsilon$ は初期状態の定常状態からの遠さを表す.

## 3 現象

この初期条件から始めると，系は比較的短時間の過渡的過程を経て，安定した挙動に達する．その挙動は系のパラメーター $(\epsilon, \Gamma)$ により三種類に分かれる．これはオーダー

[1]数値シミュレーションにおいては，計算スキームの安定化のため，右辺に hyper viscosity と呼ばれる項 $(-1)^{h+1}\nu\nabla^{2h}\omega$ を加える；ここで $h = 4$.

パラメーター $Z(t) = -\mathrm{Re}\ \hat{\omega}_{(1,0)}(t)$ により定量的に同定できる；ここで $\hat{\cdot}_{\boldsymbol{q}}(t)$ は $\cdot(t, \boldsymbol{r})$ の Fourier 変換である．

一つ目は base flow (4) と同様の zonal flow である．二つ目は，(5) と同様の dipole flow である．これらは巨視的なレベルでは定常状態である．すなわち，前者では $Z(t)$ は零，後者では有限値で，それぞれ時間的にほぼ一定である（保存系のため振幅の小さな振動は残る）．前述のように zonal flow も dipole flow も統計力学的な平衡状態である．すなわちこの二つは平衡状態の近傍へ緩和したことになる．

注目すべき三つ目は，これらと異なり，非定常状態である．すなわち，base flow の他に，その流線に沿って二組の正負の渦がペアとなって運動してゆく．このとき $Z(t)$ は振幅の大きな時間的振動をする．これはこれまで知られていなかった，新しいクラスの時空パターンである．

## 4　分岐

我々は平衡状態からの連続的な変化に興味があるのだった．相図の上で，アスペクト比 $\Gamma$ 一定の下，初期変位の強度 $\epsilon$ を大きくする，すなわち初期状態を平衡状態から遠ざけてゆくと，安定状態での挙動は定常的な zonal flow から振動状態へと転移する．

この転移すなわち分岐の，分岐点近傍での様子を調べる．すると，オーダーパラメーター $Z(t)$ の時間振動の振幅は，ある $\epsilon_c$ から $(\epsilon - \epsilon_c)^{1/2}$ のように立ち上がることが分かる．これは Hopf 分岐と同様であり，ダイナミクスの低次元性が示唆される．つまり，無限自由度保存力学系である二次元 Euler 方程式の中に，低次元力学系の構造が見出されたと言える．

## 5　動的自己無撞着解析

この振動状態の安定性について考察する．分岐前の場が解の形で与えられているわけではないので，通常のやり方での安定性解析・分岐解析はできない．そこで，次のような動的な自己無撞着解析とでも呼べる方法により説明を与える．

まず，二次元 Euler 方程式の流れ関数を用いた表現について復習しておく．非圧縮性条件 $\partial_x v_x + \partial_y v_y = 0$ より，

$$\dot{x} = v_x = +\partial_y \psi, \qquad \dot{y} = v_y = -\partial_x \psi \tag{7}$$

なる場 $\psi$ が存在する．これは流体力学の言葉で言えば流れ関数であり，電磁気学の言葉で言えばベクトル・ポテンシャルの $z$ 成分である．この $\psi$ を Hamiltonian，$(x,y)$ を正準変数と見れば，Hamilton の正準方程式の形をしている．ただし Hamilton 系と違って $\psi$ は与えられているのではく，$\omega=-\nabla^2\psi$ という関係によって自己無撞着に決まるところが違っている．

ここで，上記二次元 Euler 方程式の代りに，$x$ 方向に波数 1 の，周期 $T$ で正弦的に時間振動する外場

$$\psi_{ex}(x,y)=\Omega(x,y)-2b\sin\frac{2\pi t}{T}\cos x \tag{8}$$

の中，(7) に従って運動する独立な試験点渦の集団を考える．つまり各点渦が時間振動 Hamiltonian による正準方程式で動く一体問題である．この点渦の集団運動は渦度場

$$\omega_{in}(t,\boldsymbol{r})=\sum_j \omega_0\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j(t)) \tag{9}$$

をつくる（ここで $\omega_0$ は渦度単位）．もしこの集団的渦度場に $\omega_{in}=-\nabla^2\psi_{in}$ として対応する集団的流れ関数 $\psi_{in}$ が，外場 $\psi_{ex}$ に一致すれば，少なくとも波数 1 においては，この集団運動は元の二次元 Euler 方程式を再現していることになる．

この一体問題は standard map 類似のものである．そこで Poincaré 断面をとってみる．$y/\Gamma=\pm\pi/2$ のところには KAM トーラスが残っており，$y/\Gamma=0,\pi$ のところには chaotic sea ができている．さらに，この chaotic sea の中に振動外場への一対一共鳴のトーラス島がある．注目すべきは，この共鳴の位置が，元々の二次元 Euler 方程式における渦度クラスターの位置と完全に一致していることである．

これより，この振動状態の安定性が次のように説明できる：ひとたび，この共鳴の位置に渦度が集中したとする．その集中した渦度は base flow に沿って運動し，時間振動的な場を生成する（ミクロ→マクロ）．するとこの振動場それ自体によって，この渦度は拡散せずにそのトーラスの中に閉じ込められる（マクロ→ミクロ）．こうして振動状態は自己無撞着に安定して自続する．

## 6 考察

今回報告した現象は，著者と金子が以前報告した，大自由度 Hamilton 系における集団運動 [11] と同質のものである．実際，前節で述べたように，非圧縮性二次元流体系と Hamilton 系は系として類似した構造を持つ．二次元流体の優位性は，実験や観測におい

て実現，検証しやすいことにあるだろう．一方でHamilton系の優位性は，長時間の安定したシミュレーションが可能なので，振動状態からの緩和についても見ることができるところにある．

この現象はEuler方程式に特異的なものではない．実際，高Raynolds数の二次元確率的Navier-Stokes方程式

$$\partial_t \omega + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \omega = -\alpha \omega + \nu \nabla^2 \omega + \xi(t, \boldsymbol{r}) \tag{10}$$

（ここで$\alpha$はRayleigh摩擦，$\xi$は平均して零の確率的外力）においても同様の現象が観察でき，しかもそれは初期条件によらず自己組織化される．つまりこの巨視的振動状態は，高Raynolds数極限で正則的に見られる現象であると思われる．ただし，二次元Euler方程式と違ってずっと安定して存在するわけではなく，いずれ崩壊し，その後生成と崩壊とを繰り返す．二次元Euler方程式はこの振動状態を安定して解析できる理想モデルであると見なすことができる．

## 謝辞

本研究は著者の前所属先の京都大学物理学教室において，文部科学省グローバルCOEプログラム「普遍性と創発性から紡ぐ次世代物理学」の支援を受けて行った．また現在著者はJST-CREST 「ダイナミクス全構造計算法の発展による脳神経—身体リズム機構の解明と制御」の支援を受けている．

## 参考文献

[1] L. Onsager, Nuovo Cimento Suppl. **6**, 279 (1949) .
[2] J. Miller, Phys. Rev. Lett. **65**, 2137 (1990).
[3] R. Robert, J. Stat. Phys. **65**, 531 (1991).
[4] R. Robert and J. Sommeria, J. Fluid Mech. **229**, 291 (1991).
[5] L. Onsager, Phys. Rev. **37**, 405 (1931); **38**, 2265 (1931).
[6] F. Bouchet and H. Morita, Physica D **239**, 948 (2010).
[7] F. Bouchet and E. Simonnet, Phys. Rev. Lett. **102**, 094504 (2009).
[8] H. Morita, E. Simonnet, and F. Bouchet, in preparation.
[9] H. Morita, submitted, arXiv:1103.1140
[10] Z. Yin, D. C. Montgomery, and H. J. H. Clercx, Phys. Fluids **15**, 1937 (2003).
[11] H. Morita and K. Kaneko, Phys. Rev. Lett. **96**, 050602 (2006).